２０１８阪大文系数学　解答速報

1 関数 $f(t)=(\sin t-\cos t)\sin 2t$ を考える．

（１）$x=\sin t-\cos t$ とおくとき，$f(t)$ を x を用いて表せ．

（２）t が $0\leqq t\leqq \pi$ の範囲を動くとき，$f(t)$ の最大値と最小値を求めよ．　(配点率 30%)

▶解答◀

（１）$x^2=(\sin t-\cos t)^2$

$=\sin^2 t+\cos^2 t-2\sin t\cos t$

$=1-2\cdot\dfrac{1}{2}\sin 2t$

よって $\sin 2t=1-x^2$ であるから

$f(t)=x(1-x^2)=\boldsymbol{-x^3+x}$

（２）$x=\sin t-\cos t$

$=\sqrt{2}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq t\leqq\pi$ より

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq t-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

$-1\leqq x\leqq\sqrt{2}$

$f(t)=g(x)$ とおくと，

$g'(x)=-3x^2+1=-3\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↘	$-\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\sqrt{2}$

よって，$f(t)$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}$，最小値は $\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

2 1 個のさいころを 3 回投げる試行において，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする．

（１）$\displaystyle\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx=0$ である確率を求めよ．

（２）a，b が 2 以上かつ $2\log_a b-2\log_a c+\log_b c=1$ である確率を求めよ．

(配点率 35%)

▶解答◀

（１）$\displaystyle\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx$

$\displaystyle=\int_a^c (x-a)\{(x-a)+(a-b)\}\,dx$

$\displaystyle=\int_a^c \{(x-a)^2+(a-b)(x-a)\}\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}(x-a)^3+\frac{1}{2}(a-b)(x-a)^2\right]_a^c$

$=\frac{1}{3}(c-a)^3+\frac{1}{2}(a-b)(c-a)^2=0$

$\frac{1}{6}(c-a)^2\{2(c-a)+3(a-b)\}=0$

$(c-a)^2(a-3b+2c)=0$

（ｉ）$a=c$ のとき，$(a,\ c)$ の組は 6 組あり，それぞれに対して b が 6 通りあるので，$6\cdot 6=36$ 通り

（ii）$a-3b+2c=0$ のとき，$3b=a+2c$

$b=1$ のとき $a+2c=3$ で，$(a,\ c)=\underline{(1,\ 1)}$

$b=2$ のとき $a+2c=6$ で，$(a,\ c)=\underline{(2,\ 2)}$, $(4,\ 1)$

$b=3$ のとき $a+2c=9$ で，$(a,\ c)=(1,\ 4)$, $\underline{(3,\ 3)}$, $(5,\ 2)$

$b=4$ のとき $a+2c=12$ で，$(a,\ c)=(2,\ 5)$, $\underline{(4,\ 4)}$, $(6,\ 3)$

$b=5$ のとき $a+2c=15$ で，$(a,\ c)=(3,\ 6)$, $\underline{(5,\ 5)}$

$b=6$ のとき $a+2c=18$ で，$(a,\ c)=\underline{(6,\ 6)}$

下線を施した $(a,\ c)$ の組は $a=c$ で，すでに（ｉ）で数えたので，これらを除いて 6 通り

よって，求める確率は $\frac{36+6}{6^3}=\mathbf{\frac{7}{36}}$

（２）$2\log_a b-2\log_a c+\log_b c=1$

$2\log_a b-2\log_a c+\frac{\log_a c}{\log_a b}=1$

$2(\log_a b)^2-2(\log_a b)(\log_a c)$

$-\log_a b+\log_a c=0$

ここで，見やすさのため，$\log_a b=x$, $\log_a c=y$ とおく．

$2x^2-2xy-x+y=0$

$x(2x-1)-y(2x-1)=0$

$(x-y)(2x-1)=0$

（ｉ）$x=y$ のとき

$\log_a b=\log_a c$

$b=c$

$(b,\ c)=(2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$ の 5 組であり，それぞれに対して a が 5 通り（2 ～ 6）あるので，$5\cdot 5=25$ 通り

（ii）$x=\frac{1}{2}$ のとき

$\log_a b=\frac{1}{2}$

$2\log_a b=1$

$\log_a b^2=\log_a a$

$b^2=a$

$a\geqq 2$，$b\geqq 2$ より，これを満たす $(a,\ b)$ の組は $(a,\ b)=(4,\ 2)$ の 1 通り

ただし，$(a,\ b,\ c)=(4,\ 2,\ 2)$ は（ｉ）ですでに数えたので，これを除いて c が 1，3，4，5，6 の 5 通りあるので，$1\cdot 5=5$ 通り

（ｉ），（ii）より求める確率は $\frac{25+5}{6^3}=\mathbf{\frac{5}{36}}$

3 座標空間に 6 点

$$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{B}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 1,\ 0),\ \mathrm{D}(-1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{E}(0,\ -1,\ 0),\ \mathrm{F}(0,\ 0,\ -1)$$

を頂点とする正八面体 ABCDEF がある．s，t を $0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数とする．線分 AB，AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P，Q とし，線分 FD，FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分す

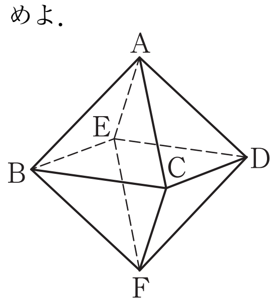
る点をR，Sとする．

（１）4点P，Q，R，Sが同一平面上にあることを示せ．

（２）線分PQの中点をLとし，線分RSの中点をMとする．s，tが$0<s<1$，$0<t<1$の範囲を動くとき，線分LMの長さの最小値mを求めよ．

（３）正八面体ABCDEFの4点P，Q，R，Sを通る平面による切り口の面積をXとする．線分LMの長さが（２）の値mをとるとき，Xを最大とするようなs，tの値と，そのときのXの値を求めよ．

（配点率35%）



▶解答◀

（１）

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=(1-s):s$であるから，

$\mathrm{PQ}\parallel\mathrm{BC}$

$\mathrm{FR}:\mathrm{RD}=\mathrm{FS}:\mathrm{SE}=(1-t):t$であるから，

$\mathrm{SR}\parallel\mathrm{ED}$

四角形BCDEは正方形で，$\mathrm{BC}\parallel\mathrm{ED}$であるから，

$\mathrm{PQ}\parallel\mathrm{SR}$

平行な2直線は同一平面上を通るので，4点P，Q，R，Sは同一平面上にある（証明終）．

（２）$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$=\frac{1}{2}(1-s,\ 0,\ s)+\frac{1}{2}(0,\ 1-s,\ s)$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{s}{2},\ s\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OS}}$

$=\frac{1}{2}(t-1,\ 0,\ -t)+\frac{1}{2}(0,\ t-1,\ -t)$

$=\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{t}{2}-\frac{1}{2},\ -t\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}$

$=\left(\frac{t}{2}+\frac{s}{2}-1,\ \frac{t}{2}+\frac{s}{2}-1,\ -t-s\right)$

$|\overrightarrow{\mathrm{LM}}|^2=2\left(\frac{t}{2}+\frac{s}{2}-1\right)^2+(-t-s)^2$

$=\frac{3}{2}s^2+3st+\frac{3}{2}t^2-2s-2t+2$

$=\frac{3}{2}s^2+(3t-2)s+\frac{3}{2}t^2-2t+2$

$=\frac{3}{2}\left(s+\frac{3t-2}{3}\right)^2-\frac{1}{6}(9t^2-12t+4)$

$+\frac{3}{2}t^2-2t+2$

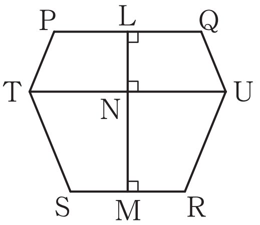
$=\frac{3}{2}\left(s+t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$

$s+t-\frac{2}{3}=0$のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{LM}}|^2$および$|\overrightarrow{\mathrm{LM}}|$は最小となる．$0<s<1$，$0<t<1$のとき$s+t=\frac{2}{3}$を満たす$s$，$t$は存在する．

よって求めるmの値は$m=\sqrt{\frac{4}{3}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

（３）4点P，Q，R，Sを通る平面と線分EB，DCとの交点をそれぞれT，Uとすると，切り口は次の

ような六角形となる．

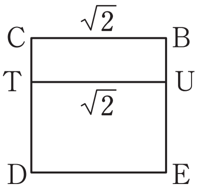


PQ // TU // SR // BC であり，$s+t=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{LM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)\cdot(-1,\ -1,\ 0)\\&=0\end{aligned}$$

となり，LM と PQ，SR は直交する．

さて，正八面体の 1 辺の長さは $\sqrt{2}$ で，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=(1-s)\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{SR}}|=(1-t)\sqrt{2}$ である．また，線分 UT は正方形 BCDE 上にあって，$|\overrightarrow{\mathrm{UT}}|=\sqrt{2}$



LM と TU の交点を N とすると，z 座標に着目して

$$|\overrightarrow{\mathrm{LN}}|:|\overrightarrow{\mathrm{NM}}|=s:t$$

であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{LN}}|=\frac{s}{s+t}|\overrightarrow{\mathrm{LM}}|=s\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}s$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=\frac{t}{s+t}|\overrightarrow{\mathrm{LM}}|=\sqrt{3}t$$

よって，

$$\begin{aligned}X&=\frac{1}{2}\left\{(1-s)\sqrt{2}+\sqrt{2}\right\}\cdot\sqrt{3}s\\&\qquad+\frac{1}{2}\left\{(1-t)\sqrt{2}+\sqrt{2}\right\}\cdot\sqrt{3}t\\&=\sqrt{6}s-\frac{\sqrt{6}}{2}s^2+\sqrt{6}t-\frac{\sqrt{6}}{2}t^2\\&=\sqrt{6}(s+t)-\frac{\sqrt{6}}{2}(s^2+t^2)\\&=\sqrt{6}\cdot\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}\left\{s^2+\left(\frac{2}{3}-s\right)^2\right\}\\&=\frac{2\sqrt{6}}{3}-\sqrt{6}\left(s^2-\frac{2}{3}s+\frac{2}{9}\right)\\&=\frac{2\sqrt{6}}{3}-\sqrt{6}\left\{\left(s-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{9}\right\}\\&=-\sqrt{6}\left(s-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5\sqrt{6}}{9}\end{aligned}$$

よって，$s=\dfrac{1}{3}$ のとき X は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{6}}{9}}$ をとる．このとき，$s+t=\dfrac{2}{3}$ より，$\boldsymbol{s=t=\dfrac{1}{3}}$

【講評】

1 三角関数・微分（標準）

標準的な出題である．確実に得点したい．

2 確率・積分・対数（標準）

融合問題ではあるが，確率の考え方に難しい点はない．（１）では，積分区間だけを見て $a=c$ しか考えないと，他の場合を落としてしまう．（２）は対数の計算法則を利用してうまく処理したい．

3 ベクトル・2 次関数（やや難）

理系との共通問題で，レベルはやや難．計算量も多く，手際よくこなさなければならない一方で，初等幾何の力も同時に問われている．

全体として，昨年よりも難化した．