２０１７阪大文系数学　解答速報

1 b，c を実数，q を正の実数とする。放物線 $P : y = -x^2 + bx + c$ の頂点の y 座標が q のとき，放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いてあらわせ。

▶解答◀

$$-x^2 + bx + c = 0$$

の２解を α，β とおく（$\alpha < \beta$）

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = b,\ \alpha\beta = -c$$

また

$$y = -x^2 + bx + c$$
$$= -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} + c$$

よって

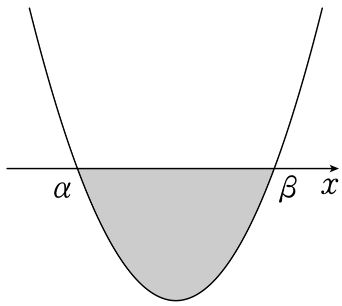
$$q = \frac{b^2}{4} + c$$
$$b^2 + 4c = 4q$$

ここで

$$(\beta - \alpha)^3 = \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$$
$$= (b^2 + 4c)^{\frac{3}{2}}$$
$$= (4q)^{\frac{3}{2}}$$

であるから

$$S = \int_\alpha^\beta (-x^2 + bx + c)\,dx$$
$$= \int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$
$$= \frac{1}{6}(4q)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{4}{3}q^{\frac{3}{2}}}$$



2 実数 x，y，z が

$$x+y+z=1,\ x+2y+3z=5$$

を満たすとする。

（１）$x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ。

（２）$z \geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ。

▶解答◀

（１）

$x+y+z=1$ …①

$x+2y+3z=5$ …②

① より

$x=1-y-z$

これを ② に代入して

$(1-y-z)+2y+3z=5$

$y=-2z+4$

よって

$x=1-(-2z+4)-z=z-3$

ここで

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$(\because\ x+y+z=1)$

$=(x+y+z)^2-3xy-3yz-3zx$

$=1-3(z-3)(-2z+4)$

$\quad -3(-2z+4)z-3z(z-3)$

$=9z^2-33z+37$

$=9\left(z-\dfrac{11}{6}\right)^2+\dfrac{27}{4}$

したがって，求める最小値は $\boldsymbol{\dfrac{27}{4}}$

（２）

$P=xyz$ とおく

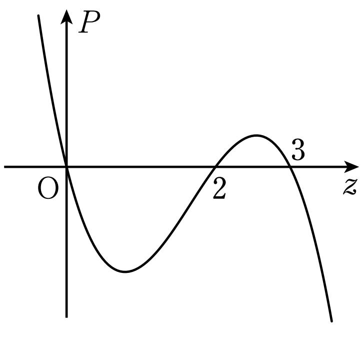
$P=(z-3)(-2z+4)z$

$=-2(z^3-5z^2+6z)$

$\dfrac{dP}{dz}=-2(3z^2-10z+6)$

増減表は下のようになる

z	0	$\cdots$	$\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$
$\dfrac{dP}{dz}$		$-$	0	$+$	0	$-$
P	0	↘		↗		↘



したがって，$\boldsymbol{z=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}}$ で最大値をとる

注意 最大値は $-\dfrac{4}{27}(10-7\sqrt{7})$ である。

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=8{a_n}^2(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

（１）$b_n=\log_2 a_n$ とおく。b_{n+1} を b_n を用いてあらわせ。

（２）数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

（３）$P_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$ とおく。数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ。

（４）$P_n>10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

▶解答◀

（１）

$$a_{n+1}=8{a_n}^2$$

両辺，底２の対数をとると

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2(8{a_n}^2)$$

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2^3+\log_2 {a_n}^2$$

$$\log_2 a_{n+1}=3+2\log_2 a_n$$

ここで，$b_n=\log_2 a_n$ とおくと

$$\boldsymbol{b_{n+1}=2b_n+3}$$

（２）

$$b_{n+1}=2b_n+3$$

この漸化式は，方程式 $\alpha=2\alpha+3$ を満たす解 $\alpha=-3$ を用いて次のように変形できる

$$b_{n+1}+3=2(b_n+3)$$

$b_1=\log_2 a_1=\log_2 2=1$ より，数列 $\{b_n+3\}$ は，初項 $1+3=4$，公比２の等比数列であるから

$$b_n+3=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$$

$$\boldsymbol{b_n=2^{n+1}-3}$$

（３）

$$P_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$$

両辺，底２の対数をとると

$$\begin{aligned}\log_2 P_n&=\log_2(a_1a_2a_3\cdots a_n)\\&=\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots+\log_2 a_n\\&=\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_k\\&=\sum_{k=1}^{n}b_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(2^{k+1}-3\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(4\cdot 2^{k-1}-3\right)\\&=\frac{4(1-2^n)}{1-2}-3n\\&=4(2^n-1)-3n\\&=2^{n+2}-3n-4\end{aligned}$$

したがって

$$P_n=\boldsymbol{2^{2^{n+2}-3n-4}}$$

（4）

$$P_n > 10^{100}$$

$$2^{2^{n+2}-3n-4} > 10^{100}$$

両辺，底 2 の対数をとると

$$2^{n+2} - 3n - 4 > 100\log_2 10$$

ここで，$\log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 32$ より

$$\log_2 2^3 < \log_2 10 < \log_2 2^5$$

$$3 < \log_2 10 < 5$$

$$300 < 100\log_2 10 < 500$$

であり，

$$300 < 100\log_2 10 < 2^{n+2}-3n-4 < 500$$

を満たす自然数 n は

$n = 6$ のとき $2^{6+2} - 3\cdot 6 - 4 = 234$

$n = 7$ のとき $2^{7+2} - 3\cdot 7 - 4 = 487$

$n = 8$ のとき $2^{8+2} - 3\cdot 8 - 4 = 996$

より，$n = 7$ である

したがって，求める最小の自然数 n は $\mathbf{7}$ である